XXVII^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2021

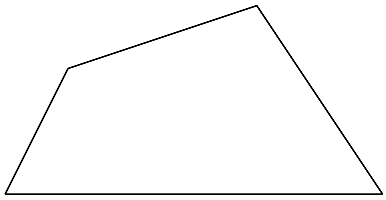
Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1
En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E que se encuentran en ese orden sobre una línea recta. En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

PROBLEMA 2
En un tablero cuadriculado de 2×8 se desea colorear cada casilla de rojo o azul de modo tal que en cada subtablero de 2×2 haya al menos 3 casillas pintadas de azul. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta coloración?
Nota. Un subtablero de 2×2 es un cuadrado formado por cuatro casillas que tienen un vértice común.

PROBLEMA 3
En un año que tiene 365 días, ¿cuál es la máxima cantidad de “martes 13” que puede haber?
Nota. Los meses de abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días cada uno; febrero tiene 28 y todos los demás tienen 31 días.

PROBLEMA 4
A Facundo y Luca les han regalado un pastel que tiene la forma del cuadrilátero de la figura.



Van a hacer dos cortes rectos sobre el pastel obteniendo así 4 porciones con forma de cuadrilátero. Luego Facundo se quedará con dos porciones que no compartan ningún lado; las otras dos serán para Luca. Indicar cómo pueden hacer los cortes para que ambos niños reciban la misma cantidad de pastel. Justificar por qué cortando de esa manera se logra el objetivo.

PROBLEMA 5
Beto escribió 36 enteros positivos consecutivos en el pizarrón. Calculó la suma de todos los dígitos de los 16 números más pequeños y escribió el resultado en color azul. Luego calculó la suma de todos los dígitos de los 10 números más grandes y escribió el resultado en color rojo. ¿Es posible que el número azul sea menor o igual que el número rojo? Si la respuesta es sí, mostrar cuáles pueden ser los números que escribió Beto; si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

XXVII^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2021

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

PROBLEMA 1

En el pizarrón están escritos los 99 números 1, 2, 3, …, 98, 99. Hay que pintar 50 de ellos de manera tal que la suma de dos números pintados nunca sea igual a 99 ni a 100. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

PROBLEMA 2

Sea N un entero positivo. Un divisor de N es *propio* si es mayor que 1 y menor que N. Por ejemplo, 2, 3, 6 y 9 son todos los divisores propios de 18.
Un entero positivo es *especial* si tiene al menos dos divisores propios y es múltiplo de todas las posibles diferencias entre dos de ellos. Determinar todos los enteros positivos que son especiales.

PROBLEMA 3

Sean ABC un triángulo y D un punto en su interior tal que $DBC = 60^{o}$ y $DCB = DAB = 30^{o}$.
Si M y N son los puntos medios de AC y BC, respectivamente, demostrar que $DMN = 90^{o}$.

PROBLEMA 4

En cada vértice de un polígono de 13 lados escribimos uno de los números 1, 2, 3, …, 12, 13, sin repetir. Luego, en cada lado del polígono escribimos la diferencia de los números de los vértices de sus extremos (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si dos vértices consecutivos del polígono tienen los números 2 y 11, en el lado que determinan se escribe el número 9.
a) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 5?
b) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 6?

PROBLEMA 5

Demostrar que existen 100 enteros positivos distintos $n_1, n_2, ..., n_{100}$ tales que $\dfrac{n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + ... + n_{100}^3}{100}$ es un cubo perfecto.